



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

## OPERAČNÍ VÝZKUM V OBLASTECH RECYKLACE ODPADŮ

OPERATIONAL RESEARCH IN WASTE RECYCLING

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Assa Camara

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Martin Pavlas, Ph.D.

BRNO 2017



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Studentka: **Assa Camara**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Martin Pavlas, Ph.D.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Operační výzkum v oblastech recyklace odpadů

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce bude zaměřena na problematiku matematického modelování nakládání s odpady v souladu s hierarchií definovanou legislativou EU.

Bude provedena identifikace možné míry separace a zkoumán vztah mezi separací a recyklací odpadu.

Student využije a prohloubí si znalosti v oblastech operačního výzkumu, tj. optimalizace a matematické statistiky.

V aplikační části se zaměří na řešení navržených modelů a formulaci doporučení, které z daných řešení vyvodí.

V průběhu zpracování bude práce konzultována se specialistou pro oblast operačního výzkumu z Ústavu Matematiky (Ing. Jakub Kůdela).

Úloha je motivována přípravou projektu SMART CITY.

### Cíle bakalářské práce:

- Seznámení se s problematikou recyklace odpadů.
- Výběr vhodných modelů a metod operačního výzkumu.
- Identifikace možného potenciálu pro recyklaci odpadů.
- Analýza ekonomických dopadů v případě zvýšení míry recyklace pomocí vhodných statistických charakteristik (např. EVPI).
- Interpretace výsledků a návrh doporučení.

**Seznam doporučené literatury:**

WAITE, Steve, COX, Paul, TUDOR, Terry, 2015. Strategies for local authorities to achieve the EU 2020 50% recycling, reuse and composting target: A case study of England. Resources, Conservation and Recycling, Volume 105, Part A, pp. 18-28.

CHALLCHAROENWATTANA, Amornchai, PHARINO Chanathip, 2016. Multiple-criteria decision analysis to promote recycling activities at different stages of urbanization. Journal of Cleaner Production, Volume 137, pp. 1118-1128.

BAZARAA, Mokhtar, JARVIS, John, SHERALI, Hanif, 2010. Linear Programming and Network Flows. New York: Wiley and Sons.

NASH, Stephen, SOFER, Ariela, 1995. Linear and nonlinear programming. New York: McGraw-Hill.

KLAPKA, Jindřich, DVOŘÁK, Jiří, POPELA, Pavel, 2001. Metody operačního výzkumu, Brno.

GAMS Modelling Language Manuals, 2015.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Bakalárska práca je zamerané na nájdenie a popísanie matematického modelu, ktorý rekonštruje skutočné súčasné finančné náklady na zber a zvoz odpadu na úrovni obcí s rozšírenou pôsobnosťou, ktoré nie sú ináč dostupné a sú potrebné na ďalšie plánovanie s využiteľným odpadom. Na vytvorenie modelu sú použité znalosti z optimalizácie, štatistiky a teórie grafov, ktoré sú v texte zhrnuté. Model je aplikovaný na skutočné dáta v prostredí GAMS. Výsledky aplikácie sú okomentované a analyzované. Na základe tejto analýzy sú uvedené aj možnosti vývoja tohto modelu.

## Summary

The bachelor thesis is aimed at finding and describing a mathematical model that reconstructs the actual current financial costs of collecting and collecting waste at the level of municipalities with expanded scope, which are not easily available and are needed for further planning in waste management. In order to create the model, the knowledge of optimization, statistics and graph theory are summarized in the text. The model is applied to real data in the GAMS environment. The results of the application are commented on and analysed. Based on this analysis, there are also possibilities to develop this model.

## Klíčová slova

štatistika, nelineárne programovanie, náklady na zpracovanie odpadu, komunálny odpad, tok v sieti

## Keywords

statistics, non-linear programming, waste treatment costs, municipal waste, network flow

CAMARA, A. *Operační výzkum v oblastech recyklace odpadů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 28 s. Vedoucí Ing. Martin Pavlas, Ph.D.



Prehlasujem, že svoju bakalársku prácu na tému *Operačný výskum v oblasti recyklácie odpadu*, som zpracovala samostatne pod vedením vedúceho bakalárskej práce a že som uviedla všetky použité pramene a literatúru, z ktorých som čerpala.

Assa Camara





Tímto by som chcela poďakovať Ing. Martinovi Pavlasovi, Ph.D. za vedenie mojej bakalárskej práce. Veľká vďaka patrá Ing. Radovanovi Šomplákovi, Ph.D. za uvedenie do problematiky a rady pri tvorbe tejto práce. Ďalej by som chcela poďakovať Ing. Vlastimírovi Nevrlému a Ing. Františkovi Janošťákovi za pomoc pri práci zo software. V poslednej rade chcem za podporu poďakovať svojej rodine a priateľom.

Assa Camara



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Teória grafov</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Optimalizácia</b>	<b>5</b>
3.1	Základy optimalizácie . . . . .	5
3.2	Lineárne programovanie . . . . .	6
3.3	Nelineárne programovanie . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Štatistika</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Matematický model</b>	<b>10</b>
5.1	Motivačná úloha . . . . .	10
5.1.1	Označenie . . . . .	10
5.1.2	Matematický model . . . . .	11
5.2	Model na zistenie finančných nákladov na úrovni ORP . . . . .	13
5.2.1	Označenie . . . . .	13
5.2.2	Matematický model . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Aplikácia na ORP</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Možnosti ďalšieho vývoja</b>	<b>22</b>
7.1	Aplikácia na obce . . . . .	22
7.1.1	Označenie v modeli s rozšírením na obce . . . . .	22
7.2	Aplikácia na frakcie triedeného odpadu ako napr bioodpad, separovaný plast papier a sklo . . . . .	23
<b>8</b>	<b>Záver</b>	<b>24</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>25</b>
	<b>Seznam použitých zkratok</b>	<b>27</b>
<b>9</b>	<b>Zoznam príloh</b>	<b>28</b>

# 1 Úvod

V Českej Republike sa momentálne zrecykluje len okolo 16% odpadu a až 64% komunálneho odpadu sa skládkuje [14]. Motiváciou na zistenie týchto údajov na úrovni celej republiky je novela zákona [12], podľa ktorej má od 1.1.2024 platiť úplný zákaz skládkovania neupraveného odpadu, preto je nutné zvýšiť množstvo zrecyklovaného odpadu a nájsť vhodné využitie pre zvyšný odpad, akým je napríklad energetické.

Pre plánovanie budúcich zmien, ktoré sú vyvolané touto novelou zákona, je potrebné mať informácie o súčasných nákladoch a tokoch odpadu, ktoré nie sú známe, preto vznikla bakalárska práca *Operačný výskum v oblasti recyklácie odpadu*, ktorá je zameraná na vytvorenie modelu, ktorý má slúžiť na rekonštrukciu finančných nákladov za prevoz a spracovanie odpadu, a rekonštrukciu ďalších údajov v oblasti odpadového hospodárstva (OH), ak sú známe len čiastočné ekonomické informácie.

Na zvýšenie podielu recyklácie je totiž potrebné nielen vzdelávať občanov, ale aj vytvoriť ďalšie dotriedňovacie strediská, v ktorých sa odpad roztriedi na ten, ktorý už nie je ďalej využiteľný a ten, ktorý bude ďalej spracovaný, a recyklačné závody, v ktorých sa daný už vytriedený odpad spracuje. Na to je potrebné nájsť miesta, ktoré majú nielen výhodnú pozíciu v sieti toku odpadu ČR, ale aj tak, aby to bolo finančne efektívne pre obce. Podobne na zvýšenie percenta spaľeného odpadu je potrebné vybudovať nové spaľovne na takých miestach, ktoré sú výhodné aj z pohľadu obcí aj z pohľadu investorov.

Cieľom tejto práce je vytvoriť základný model, z ktorého by sa postupnými modifikáciami dali tieto informácie odhadnúť na základe údajov dostupných z Institutu pro udržitelný rozvoj měst a obcí (IMURO), Českého statistického úradu(ČSU), Verejného informačného systému odpadového hospodárstva (VISOH),EKO-KOM a MONITOR.

V prvých kapitolách budú priblížené základné pojmy popisnej štatistiky, teórie grafov a optimalizácie, ktoré boli použité v Bakalárskej práci. Následne sú v ďalšej kapitole popísané a na motivačných príkladoch predvedené dva matematické modely, jeden základný a druhý už s implementovanými údajmi popisnej štatistiky.

Výpočty boli realizované v prostredí modelovacieho systému GAMS (General Algebraic Modeling System). V záverečných kapitolách práce je uskutočnená aplikácia modelu a možnosti ďalšieho využitia.

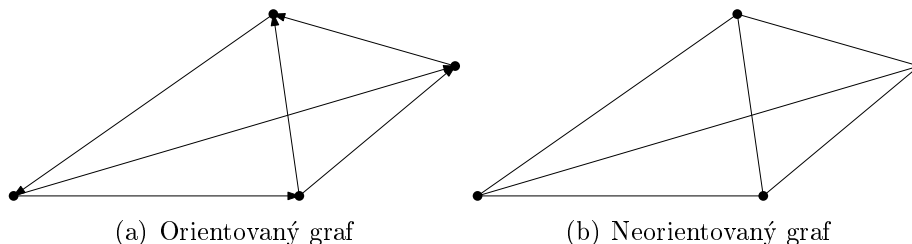
## 2 Teória grafov

Teória grafov je časť diskretnéj matematiky, ktorá sa používa na zobrazenie matematickej štruktúry a vzťahov medzi objektami, ktorými sú v prípade tejto bakalárskej práce vzdialenosti medzi obcami s rozšírenou pôsobnosťou (ORP) a tok odpadu medzi jednotlivými ORP.

V nasledujúcej kapitole sú uvedené základné pojmy z teórie grafov, s ktorými sa ďalej v texte pracuje. Pri písaní tejto časti bolo čerpané z [2], [5], [7] a [11].

**Definícia 2.1.** Neorientovaný graf je trojica  $G = (V, E, \epsilon)$  tvorená konečnou množinou  $V$ , ktorej prvky nazývame vrcholy, konečnou množinou  $E$ , ktorej prvky nazývame neorientovanými hranami a zobrazením  $\epsilon$  označovaným ako vzťah incidencie. Toto zobrazenie priradzuje každej hrane  $e \in E$  jednoprvkovú alebo dvojprvkovú množinu vrcholov hrany. Ak je  $\epsilon(e)$  jednoprvková množina, je hrana nazývaná neorientovanou slučkou (obr.2.1(b)).

**Definícia 2.2.** Orientovaný graf je trojica  $G = (V, E, \epsilon)$  tvorená konečnou množinou  $V$ , ktorej prvky nazývame vrcholy, konečnou množinou  $E$ , ktorej prvky nazývame orientovanými hranami a zobrazením  $\epsilon : E \rightarrow V^2$ , nazývaným vzťah incidencie. Toto zobrazenie priradzuje každej hrane  $e \in E$  usporiadanú dvojicu vrcholov  $\epsilon(e) = (x, y) \in V^2$ . Vrchol  $x$  je počiatočným vrcholom hrany  $e$ , vrchol  $y$  je koncovým vrcholom hrany  $e$  (obr.2.1(a)).

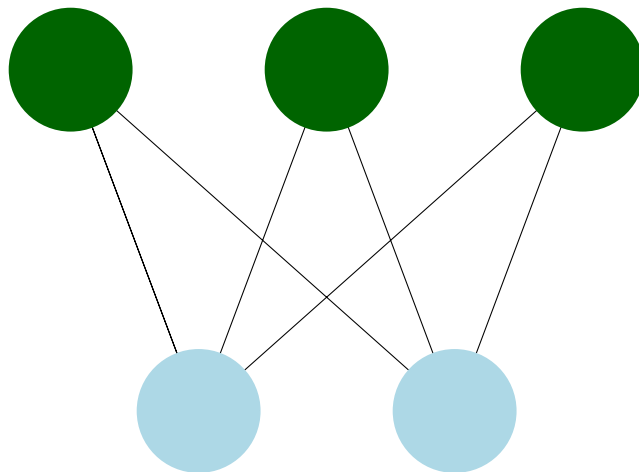


Obr. 2.1: Grafické znázornenie grafov

**Definícia 2.3.** Povieme, že graf  $G = (V, E)$  sa nazýva úplný, keď pre každé dva uzly  $x, y \in V$ , kde  $x \neq y$ , existuje aspoň jedna hrana  $e$ , ktorá ich spája.

**Definícia 2.4.** Bipartitný graf je graf, ktorého množinu vrcholov vieme rozdeliť na dve časti, pričom z každého vrcholu jednej časti, ide hrana iba do vrcholu druhej časti a naopak. Pokiaľ ide z každého vrcholu jednej časti hrana do každého vrcholu druhej časti, hovoríme o úplnom bipartitnom grafe obr 2.2.

**Definícia 2.5.** Graf ku ktorého hranám sú priradené nejaké číselné hodnoty, nazývame *Ohodnotený graf* alebo sieť. Týmto hodnotám sa hovorí dĺžky, váhy alebo tiež ceny. Zobrazenie  $a : E \rightarrow \mathbf{R}$ , ktoré priradzuje hranám ich hodnoty, nazývame ohodnotením hrán.



Obr. 2.2: Úplný bipartitný graf

**Reprezentácia grafov** Grafy sa znázorňujú v rovine, kde sa vrcholom grafov priradia body roviny a hrany sa znázorňujú spojnicou príslušných bodov. V prípade orientovaných grafov je orientácia hrany vyznačená šípkou v smere od počiatočného ku konečnému vrcholu 2.1. Okrem geometrických prostriedkov sa dajú k popisu grafov využiť aj matice.

**Příklad 2.6.** Matica vzdialenosti z motivačného modelu, 5.1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 93 & 75 \\ 55 & 0 & 52 & 87 \\ 93 & 52 & 0 & 43 \\ 75 & 87 & 43 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definícia 2.7.** Nech  $G = (V, E, \epsilon)$  je orientovaný graf bez slučiek. V prípade pevne zvoleného poradia vrcholov a hrán, je možné grafu  $G$  priradiť maticu incidencie predpisom

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{ak } v_i \text{ je počiatočným vrcholom hrany, } e_j \\ 1 & \text{ak } v_i \text{ je koncovým vrcholom hrany, } e_j \\ 0 & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

**Definícia 2.8.** Sieť je štvorica  $(G, z, s, w)$  kde  $G$  je orientovaný graf, vrcholy  $z, s \in V(G)$  sú zdroj a spotrebič a  $w : E(g) \rightarrow \mathbf{R}$  je kladné ohodnotenie hrán, nazývané kapacita hrán.

**Definícia 2.9.** Tokom v sieti  $G$ , kde  $G$  je orientovaný graf, rozumieme také ohodnotenie  $w : E(g) \rightarrow \mathbf{R}$ , ktoré pre každý vrchol  $v \in V(G)$  spĺňa:

$$\forall v \in V(G) - \{z, s\} : \sum_{e \in E_G^-(v)} w(e) = \sum_{e \in E_G^+(v)} w(e).$$

Tzn. prítok do každého uzla odpovedá odtoku z tohoto uzlu okrem zdroja, kde tok vzniká, a spotrebiča, v ktorom rovnaké množstvo odpadu zaniká.

## 3 Optimalizácia

Optimalizácia je oblasť matematiky, ktorá sa prudko vyvíjala v období druhej svetovej vojny, odvtedy je medzi inými používaná najmä vo vojenskej a priemyselnej oblasti. Lineárne programovanie a optimalizácia získali svoju popularitu najmä vďaka schopnosti popísať veľké a komplexné problémy a schopnosti tieto problémy rýchlo a efektívne riešiť použitím moderných metód a počítačov. V nasledujúcej kapitole sú vysvetlené niektoré zo základných pojmov optimalizácie a lineárneho programovania na základe zdrojov [4], [10], [6], [3].

### 3.1 Základy optimalizácie

**Definícia 3.1.** Všeobecne je optimalizačná úloha formulovaná v tvare:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

za podmienky

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (3.2)$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  je vektor dimenzie  $n$ , a  $x_j, j = 1, \dots, n$  sú tzv. rozhodovacie premenné,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  je účelová funkcia, ktorej extrém hľadáme. Funkcie  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  nazveme obmedzujúcimi podmienkami. Potom množina  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} | \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\}$  je označovaná ako množina prípustných riešení.

**Klasifikácia extrémov funkcie** Extrémom funkcie rozumieme bod, v ktorom má funkcia svoje maximálne alebo minimálne hodnoty v rámci okolia tohto bodu. O existencii extrému funkcie hovorí Weierstrassova veta:

**Veta 3.2.** Každá spojitá funkcia  $f(x)$  definovaná na kompaktnej (ohraničenej a uzavretej) množine  $X \subset \mathbf{R}^n$ , má na nej maximálnu aj minimálnu hodnotu.

**Definícia 3.3.** Povieme, že funkcia  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  má v bode  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  lokálne maximum (resp. lokálne minimum) práve vtedy, keď existuje čisté okolie  $O(x_0) - \{x_0\}$  také, že  $O(x_0) - \{x_0\} \in \text{Dom} f$  a zároveň pre  $\forall x \in O(x_0) - \{x_0\}$  platí:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad (3.3)$$

resp.  $f(x) \geq f(x_0)$ .

Analogicky je definované ostré lokálne maximum (resp. ostré lokálne minimum), pre ktoré platí:  $f(x) < f(x_0)$ , resp.  $f(x) > f(x_0)$ .

**Definícia 3.4.** Povieme, že funkcia  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  má v bode  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  globálne maximum (resp. globálne minimum), práve keď  $\forall x \in \text{Dom} f - \{x_0\}$  platí:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ resp. } f(x) \geq f(x_0). \quad (3.4)$$

Analogicky pre ostré globálne maximum (resp. ostré globálne minimum), platí:  $f(x) < f(x_0)$ , resp.  $f(x) > f(x_0)$ .

**Definícia 3.5.** Množina  $X \subseteq \mathbf{R}^n$  sa nazýva konvexná, ak

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in (0, 1) : \lambda x + (1 - \lambda)y \in X. \quad (3.5)$$

Množina  $\{\lambda x + (1 - \lambda)y | 0 \leq \lambda \leq 1\}$  tvorí úsečku spájajúcu body  $x$  a  $y$ .

Množina je teda konvexná, ak s každými dvoma bodmi obsahuje úsečku, ktorá ich spája.

**Definícia 3.6.** Majme reálnu funkciu  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$ , kde  $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$  je neprázdna konvexná množina. Povieme, že  $f$  je konvexná funkcia na  $\mathbf{X}$  práve vtedy, keď pre každé dva body  $x_1, x_2$  z množiny  $\mathbf{X}$  a pre ľubovoľné  $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$  platí:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (3.6)$$

Funkcia je teda konvexná, pokiaľ jej graf leží pod ľubovoľnou sečnicou.

**Definícia 3.7.** Povieme, že úloha  $f(x)$  je úlohou konvexného programovania práve vtedy, keď  $\mathbf{X}$  je konvexná množina a  $f(x)$  je konvexná funkcia na  $\mathbf{X}$ .

**Veta 3.8.** *Nech  $S \subset \mathbf{R}^n$  je neprázdna konvexná množina a  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  je konvexná funkcia na  $S$ . Ak je  $x_{\min}$  bodom lokálneho minima funkcie  $f$ , potom je tiež bodom globálneho minima  $f$ .*

## 3.2 Lineárne programovanie

**Definícia 3.9.** Všeobecnou úlohou lineárneho programovania nazývame úlohu minimalizovania lineárnej (tzv. účelovej) funkcie viacerých premenných, ktorá je v štandardnom tvare zapísaná

$$\min_x \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbf{X} \}, \quad (3.7)$$

Ďalej predpokladáme, že množina prípustných riešení  $X \neq \emptyset$ .

Úlohy lineárneho programovania majú mnoho zápisov a zápis použitý v definícii je len jeden z mnohých. Zápis účelovej funkcie, ktorý budeme ďalej používať v texte je sumačný zápis

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} c_i x_i \rightarrow \min.$$

Všetky úlohy lineárneho programovania do tohto tvaru vieme previesť pomocou použitia doplnkových premenných (na vytvorenie rovností z nerovností), úlohu hľadania maxima prevedieme na úlohu hľadania minima vynásobením pôvodnej účelovej funkcie číslom  $-1$ :

$$(f(x) \rightarrow \max)(-1) = -f(x) \rightarrow \min.$$



Množina  $\mathbf{X}$ , ktorej prvky sú riešením úlohy lineárneho programovania, je konvexná polyhedrická množina, vďaka čomu na riešenie úloh lineárneho programovania môžeme použiť simplexovú metódu [10]

### 3.3 Nelineárne programovanie

**Definícia 3.10.** Všeobecná úloha nelineárneho programovania má tvar:

$$\min_x \{f(\mathbf{x}) | g(\mathbf{x}) \circ \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X\}, \quad (3.8)$$

kde  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ , a hodnoty premenných  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n^T)$  majú hodnoty z množiny prípustných riešení  $X \subset \mathbf{R}^n$ , a  $\circ \in \{\leq, \geq, =\}^m$ .

V nelineárnom programovaní môžeme použiť obdobné úpravy ako v lineárnom programovaní.

**Definícia 3.11.** Špeciálnym príkladom nelineárneho programovania je kvadratické programovanie, ktoré zapisujeme v tvare

$$\min_x \{\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} | \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in X\}, \quad (3.9)$$

kde hodnoty premenných  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n^T)$  majú hodnoty z množiny prípustných riešení  $X \subset \mathbf{R}^n$ . Matica  $\mathbf{H}$  je konštantná symetrická matica, ktorá určuje kvadratickú časť, a vektor  $\mathbf{c}$  lineárnu časť modelu.

## 4 Štatistika

Popisná štatistika je disciplína, ktorá sa zaoberá zberom, spracovaním a prezentáciou analytických dát. Poskytuje výsledky, ktoré výstižne popisujú skupinu dát. Medzi najpoužívanjšie prvky popisnej štatistiky patrí aj nižšie spomenutý a v texte použitý aritmetický priemer, rozptyl a smerodajná odchýlka. Táto kapitola je napísaná na základe zdrojov [9], [13] a [1].

**Definícia 4.1.** Postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín  $X_1 \dots X_n$  sa nazýva *prostý náhodný výber*. Číslo  $n$  je rozsah výberu.

**Definícia 4.2. Aritmetický priemer** Aritmetický priemer náhodného výberu je v tvare:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.1)$$

kde  $\bar{x}$  je najlepší nestranný konzistentný odhad strednej hodnoty  $E(X) = \mu$  náhodného výberu. Tiež je používaný názov *Výberový priemer*.

**Definícia 4.3. Vážený priemer**

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad (4.2)$$

kde  $\sum_{i \in \mathcal{I}} v_i = V$ .

Vážený priemer je podobný aritmetickému priemeru až na to, že namiesto toho aby všetky dáta mali rovnakú váhu  $v_i$ , niektoré dáta ovplyvnia priemer viac (majú väčšiu váhu  $v_i$ ) a iné menej (majú menšiu váhu  $v_i$ ).

**Vlastnosti strednej hodnoty** Stredná hodnota konštanty

$$E(c) = c$$

Stredná hodnota pre súčin

$$E(cX) = cE(X)$$

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

Stredná hodnota súčtu dvoch náhodných veličín

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Tieto vlastnosti strednej hodnoty boli použité pri tvorbe modelu 5.2.

**Definícia 4.4. Rozptyl**

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (4.3)$$

$s^2$  je najlepší nestranný konzistentný odhad parametra  $D(X) = \sigma^2$  náhodného výberu.

**Definícia 4.5. Vážený rozptyl**

$$s^2 = \frac{1}{V-1} \sum_{i=1}^n v_i (x_i - \bar{x})^2, \quad (4.4)$$

kde  $\sum_{i \in \mathcal{I}} v_i = V$ .

Odvodenie jednoduchšej formy využitím poznatkov o číselných radoch :

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{V} \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{V} \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) = \\ &= \frac{1}{V} \sum_{i \in \mathcal{I}} (v_i x_i^2 - 2v_i x_i \bar{x} + v_i \bar{x}^2) = \frac{1}{V} \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{V} \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i x_i + \frac{\bar{x}^2}{V} \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i = \\ &= \frac{1}{V} \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = s^2 \\ s^2 &= \frac{1}{V} \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i x_i^2 - \bar{x}^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Kde  $\sum_{i \in \mathcal{I}} v_i = V$ .

Tento tvar pre výpočet rozptylu bude použitý pri tvorbe matematického modelu v kapitole [5.2](#).

**Definícia 4.6. Smerodajná odchýlka**

$$\sqrt{s^2} = s.$$

# 5 Matematický model

## 5.1 Motivačná úloha

Na zistenie nákladov jednotlivých obcí vytvoríme najskôr jednoduchý matematický model na výpočet celkových minimálnych finančných nákladov štyroch spolupracujúcich OPR za prevoz a spracovanie odpadu. Zistíme náklady odpadu medzi OPR za predpokladu, že poznáme interval v ktorom sa pohybujú ročné náklady na prevoz a spracovanie. Poznáme produkciu odpadu v OPR, množstvo spracovaného odpadu v jednotlivých OPR, cenu za spracovanie, cenu za prevoz a vzdialenosti medzi OPR. Túto úlohu vyriešime len ako motivačnú, zo štyrmi uzlami. Použité parametre, sú apoximáciou skutočných vzdialeností, nákladov a produkcie.

### 5.1.1 Označenie

Na zostavenie matematického modelu musíme zaviesť značenie pre množiny, parametre a premenné a popísať ich funkciu v modeli.

#### Množiny

$i, j \in \mathcal{I}$  jednotlivé OPR, množina uzlov

#### Parametre

$v_{i,j}$  vzdialenosť medzi jednotlivými OPR v km  
 $p_i$  množstvo vyprodukovaného odpadu v jednotlivých OPR v t  
 $w_j$  množstvo spracovaného odpadu v jednotlivých OPR v t  
 $n_i^{min}$  minimálne zaznamenané náklady v Kč/t  
 $n_i^{max}$  maximálne zaznamenané náklady v Kč/t  
 $c^t$  cena za prevoz v Kč/km/t  
 $c^w$  cena spracovania v Kč/t

#### Premenné

$z$  účelová funkcia (celkové náklady v Kč/t)  
 $x_{i,j}$  množstvo prepraveného odpadu medzi OPR v t  
 $n_i$  náklady jednotlivých OPR v Kč/t

### 5.1.2 Matematický model

Následne sme premenné a parametre použili v modeli. Premenné, ktoré zisťujeme, sme pre prehľadnosť tučne vyznačili:

$$\text{minimalizuj } z = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{n}_i \quad (5.1)$$

$$\text{s.t. } n_i p_i = \sum_{j \in \mathcal{I}} c^t \mathbf{x}_{i,j} v_{i,j} + \sum_{j \in \mathcal{I}} c^w x_{i,j}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (5.2)$$

$$p_i = \sum_{j \in \mathcal{I}} \mathbf{x}_{i,j}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (5.3)$$

$$w_j = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{x}_{i,j}, \quad \forall j \in \mathcal{I}, \quad (5.4)$$

$$n_{\min} \leq \mathbf{n}_i \leq n_{\max}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (5.5)$$

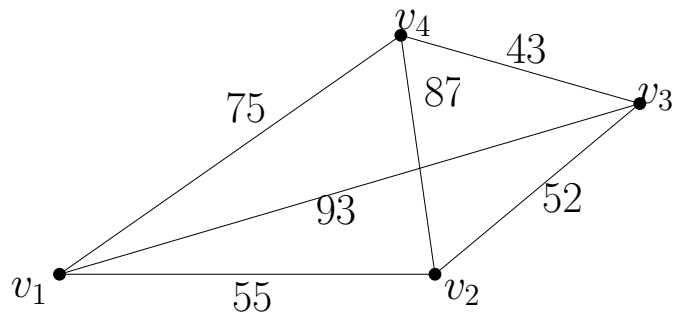
Pomocou tohto modelu môžeme zistiť náklady, ktoré má daná ORP za prevoz a spracovanie odpadu z pôvodného intervalu za predpokladu, že minimalizujeme celkové náklady všetkých ORP a zistíme aj to, aké množstvo odpadu  $x_{i,j}$  sa medzi ORP prepraví.

Rovnica (5.2) popisuje náklady jednotlivých ORP ako súčet ceny za prevoz a za spracovanie odpadu. Cena za prevoz je súčinom vzdialenosti ORP, medzi ktorými odpad prepravujeme, prepraveného množstva a ceny za prevoz jednej tony na jednom kilometri. Cena za spracovanie je súčinom spracovaného množstva a ceny za spracovanie jednej tony.

Rovnica (5.3) vyjadruje, že celkové množstvo odpadu vyprodukované vo všetkých ORP je rovné celkovému množstvu odpadu odvezeného zo všetkých ORP. Rovnica (5.4) vyjadruje, že množstvo odpadu spracovaného vo všetkých ORP je rovné množstvu odpadu, ktoré do všetkých ORP privezieme. Rovnice (5.3) a (5.4) by spolu mali nahrádzať bilančnú rovnicu, čiže zaručiť, aby v nejakom uzle nezostal nespracovaný odpad, ak bol v uzle vyprodukovaný alebo bol do uzlu privezený.

Podmienka (5.5) vyjadruje, že náklady ORP musia byť vo vopred určenom intervale.

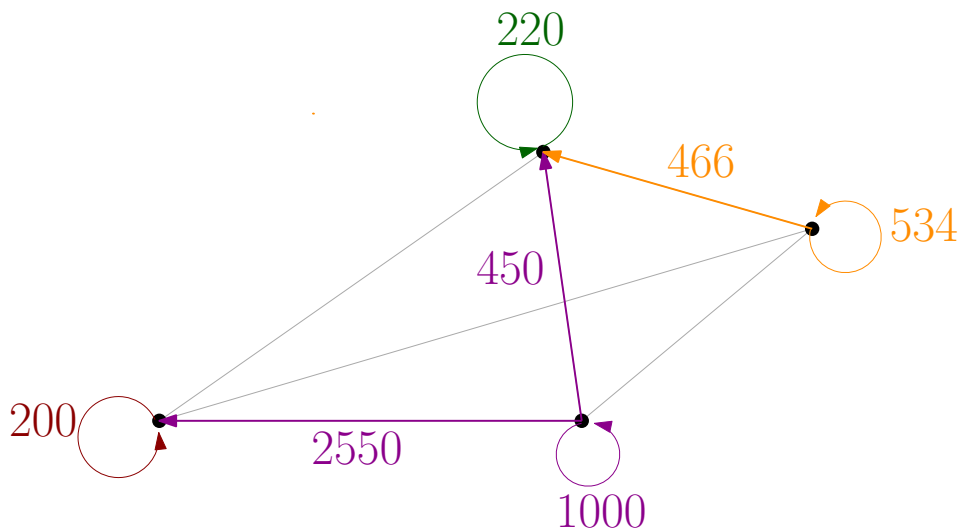
Najprv je model predvedený na menšom motivačnom príklade, v ktorom máme len štyri obce a ceny prevozu a spracovania sú v každej z nich rovnaké, ale ako uvidíme na reálnych dátach, aj tieto ceny sa môžu meniť. Konštantá cena spracovania je  $c^w = 900$  Kč/t a cena prepravy je  $c^t = 4$  Kč/t/km. V obciach je známy počet obyvateľov a na začiatok bola priemerná produkcia odpadu v každej obci rovnaká a to 200kg/osoba za rok a celkovo sa v modeli vyprodukuje len toľko odpadu koľko sa v ňom dá spracovať. Vzdialenosti medzi uzlami sú na obr 5.1 a ďalšie vstupné údaje sú uvedené v tabuľke



Obr. 5.1: Ohodnotený graf: Vzdialenosti medzi obcami v kilometroch

ORP č.	Počet ob.	$p_i$ [t]	$w_j$ [t]	$n_i^{min}$ [Kč/t]	$n_i^{max}$ [Kč/t]
$v_1$	1000	200	2750	700	1200
$v_2$	20000	4000	1000	700	1200
$v_3$	5000	1000	534	700	1200
$v_4$	1100	220	1136	700	1200

Tabuľka 5.1: Vstupné parametre



Obr. 5.2: Výsledný tok odpadu v prvej úlohe

Tieto vstupné hodnoty sú následne spracované programom GAMS. Získame výsledný tok medzi uzlami  $i$  a  $j$ , ktorý vieme zobrazit' v orientovanom ohodnotenom grafe 5.2, v ktorom hodnota úsečky označuje množstvo odpadu prepraveného z uzla  $i$  do uzla  $j$  v tonách. Z grafu tiež možno vyčítať že ORP sú v takomto prípade skutočne veľmi ekonomické, spracujú všetok svoj odpad, ktorý im umožňuje spracovať kapacita zariadenia, ktoré sa v obci nachádza, a zvyšný opad prepravujú po čo najkratšej hrane, aby boli aj náklady za prepravu minimálne. Výsledné náklady jednotlivých ORP sú  $n_i = (900; 1079, 4; 980, 15; 900)^T$  a výsledná hodnota účelovej funkcie  $z = 3860\text{Kč/t}$ .

## 5.2 Model na zistenie finančných nákladov na úrovni ORP

Model upravíme, tak aby sme v ňom zahrnuli aj rovnice popisnej štatistiky, aby sme ho potom aplikovali na reálne dáta dostupné z Institutu pro udržitelný rozvoj měst a obcí [8], ktoré boli získane z reálnych nákladov obcí v roku 2014. Je však evidentné, že prvý model treba okrem pridania parametrov priblížiť realite.

Predpoklad, že jednotlivé ORP (alebo obce) spolupracujú, totiž nie je reálny, preto zmeníme účelovú funkciu. Ako vhodnejšie a reálnejšie sa ukázalo vytvoriť počiatočný odhad nákladov jednotlivých ORP, ktorému sa bližšie venujem v kapitole 7, a minimalizovať kvadrát odchýlky od tohto odhadu. Z modelu teda nebudú výstupom len výsledné náklady, ale aj ich odchýlka od počiatočného odhadu.

Pri ďalšom spracovaní dát sme zistili, že predchádzajúci model, a to konkrétne rovnice (5.3) a (5.4), nevyhovujú naším novým požiadavkám. Keď totiž zmeníme predpoklad, že cena spracovania je parameter, na premennú, tak tieto dve rovnice nezabránili tomu, aby sa odpad neprepravoval cez dva uzly. Následne náklady na jeho spracovanie neboli priradené k nákladom uzlu, z ktorého pochádza, ale k nákladom uzlu, cez ktorý bol odpad prevezený, čo spôsobilo to, že v uzloch boli veľmi odlišné ceny spracovania.

Pomocou incidenčnej matice (2.7) vieme vytvoriť rovnicu bilancie uzla, ktorá prbú časť problému úspešne vyrieši. Avšak zatiaľ čo prvý model je spravený systémom uzol-uzol, incidenčná matica pracuje s uzlami a hranami. Z tohto dôvodu vytvoríme nový model. Zatiaľ čo prvý model používa označenie  $i$  a  $j$  pre dva rôzne uzly, druhý model používa index  $i$  na označenie uzlov a index  $j$  je používaný na označenie hrán medzi uzlami. Namiesto matice vzdialeností budeme používať vektor vzdialeností a incidenčnú maticu. Druhú časť problému sme ošetrili tým, že sme obmedzili interval, v ktorom sa musia ceny za spracovanie nachádzať.

### 5.2.1 Označenie

Kvôli zmene v označení jedinej množiny v prvom modeli, uvedieme označenie nového modelu.

#### Množiny

- $i \in \mathcal{I}$  množina uzlov (ORP)
- $j \in \mathcal{J}$  množina hrán
- $o \in \mathcal{O}$  množina intervalov podľa počtu obyvateľov
- $k \in \mathcal{K}$  množina krajov

## Parametre

$A_{j,i}$	incidenčná matica
$B_{k,i}$	matica príslušnosti ku kraju
$C_{o,i}$	matica príslušnosti do intervalu počtu obyvateľov
$E_{j,i}$	pomocná matica
$F_i$	pomocný vektor
$v_j$	dĺžka hrany j
$p_i$	množstvo vyprodukovaného odpadu v jednotlivých ORP v t
$n_i^{min}$	minimálne náklady v Kč/t
$n_i^{max}$	maximálne náklady v Kč/t
$r_i^{min}$	minimálne náklady na spracovanie v Kč/t
$r_i^{max}$	maximálne náklady na spracovanie v Kč/t
$c^t$	konštantná cena presunu Kč/km/t
$K_i^{max}$	maximálna kapacita spracovania v uzle i v t
$\bar{n}_o$	priemerné náklady ORP s rovnakým počtom obyvateľov v Kč/t
$\bar{n}_k$	priemerné náklady ORP v rovnakom kraji v Kč/t
$s_o$	smerodajná odchýlka nákladov ORP s rovnakým počtom obyvateľov v Kč/t
$s_k$	smerodajná odchýlka nákladov ORP v rovnakom kraji v Kč/t
$n_i$	počiatočný odhad nákladov jednotlivých ORP v Kč/t

## Premenné

$x_j$	množstvo využiteľného odpadu po hrane v t
$\varepsilon_i$	odchýlka od priemerných zistených nákladov v Kč/t
$n_i^v$	výsledné náklady jednotlivých ORP v Kč/t
$s_i$	cena spracovania v i-tej ORP v Kč/t
$s_j$	cena spracovania na hrane j v Kč/t
$w_i$	spracované množstvo odpadu v uzle i v t
$z$	z hodnota účelovej funkcie v Kč/t
$\alpha_1(o)$	pomocná relaxačná premenná
$\alpha_2(o)$	pomocná relaxačná premenná
$\alpha_3(k)$	pomocná relaxačná premenná

V množine  $\mathcal{I}$  je každý uzol zaznamenaný dvakrát: raz ako začiatok a raz ako koniec hrany, ide teda o úplný bipartitný graf 2. Keďže poznáme cenu spracovania v konečnom uzle, použijeme pomocnú maticu  $E_{j,i}$  na to, aby sme spojili konečný uzol a cenu spracovania v ňom s cenou spracovania na hrane. Zaručuje teda, že cena spracovania je v danom zariadení rovnaká pre všetky ORP, ktoré tam odpad privezú.

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i, \text{ ktoré je koncom hrany } j, \\ 0 & \text{pre } i, \text{ ktoré nie je koncom hrany } j. \end{cases}$$

Pomocný vektor  $F_i$  použijeme na zistenie nákladov v  $i$ .

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{pre ako začiatok hrany,} \\ 0 & \text{pre } i \text{ ako koniec hrany.} \end{cases}$$



Predpis matice B:

$$b_{k,i} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i \in \mathcal{K}, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Predpis matice C je obdobný, ako predpis matice B, len je to pre inú množinu, tzn.  $k$  nahradíme  $o$ .

### 5.2.2 Matematický model

$$z = \sum_{i \in \mathcal{I}} \varepsilon_i^2 + \sum_{o \in \mathcal{O}} (M\alpha_1(o)^2 + M\alpha_2(o)^2) + \sum_{k \in \mathcal{K}} M\alpha_3(k)^2 \quad (5.6)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{n}_i^v = n_i + \varepsilon_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (5.7)$$

$$n_{min} \leq \mathbf{n}_i^v \leq n_{max}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (5.8)$$

$$r_i^{min} \leq \mathbf{n}w_i \leq r_i^{max}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (5.9)$$

$$w_i \leq K_i^{max}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (5.10)$$

$$e_{j,i}\mathbf{n}w_j = e_{j,i}\mathbf{n}w_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall j \in \mathcal{J} \quad (5.11)$$

$$p(i) + \sum_{j \in \mathcal{J}} (a_{i,j}\mathbf{x}_j) - s_i = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall j \in \mathcal{J} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{n}_i^v p_i = F_i \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} -a_{j,i}\mathbf{x}_j d_j c^t + \sum_{j \in \mathcal{J}} -a_{j,i}\mathbf{x}_j \mathbf{s}_j \right), \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall j \in \mathcal{J} \quad (5.13)$$

$$\bar{n}_o + \alpha_1(o) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} c_{o,i} \mathbf{n}_i^v \mathbf{p}_i}{\sum_{i \in \mathcal{I}} c_{o,i} p_i}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall o \in \mathcal{O} \quad (5.14)$$

$$\bar{n}_k = \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} b_{k,i} \mathbf{n}_i^v \mathbf{p}_i}{\sum_{i \in \mathcal{I}} b_{k,i} p_i}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (5.15)$$

$$s_o^2 + p\alpha_2(o) = \frac{1}{\sum_{i \in \mathcal{I}} c_{o,i} p_i} \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i c_{o,i} (\mathbf{n}_i^v)^2 - (\bar{n}_o + \alpha_1(o))^2, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall o \in \mathcal{O} \quad (5.16)$$

$$s_k^2 + \alpha_3(k) = \frac{1}{\sum_{i \in \mathcal{I}} b_{i,k} p_i} \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i b_{i,k} (\mathbf{n}_i^v)^2 - \bar{n}_k^2, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (5.17)$$

V účelovej funkcii (5.6) **minimalizujeme** kvadrát odchýliek od počiatočného odhadu nákladov. Druhý model už nie je úlohou lineárneho programovania ale nelineárneho. Pomocné premenné sú vynásobené konštantou  $M$ , ktorá predstavuje nejakú veľkú hodnotu. Týmto zabezpečíme, že model bude na prvom mieste relaxovať obmedzenie a až tak minimalizovať odchýlku od strednej hodnoty  $\varepsilon_i$ .

Rovnica (5.7) popisuje, že  $\mathbf{n}_i^v$  sú súčet počiatočného odhadu a odchýlky, ktorú minimalizujeme v účelovej funkcii. Rovnica (5.8) je totožná s rovnicou (5.5). V (5.9) hovorí, že cena spracovania je z istého realistického intervalu. Kapacitná podmienka (5.10) zaručuje to, že v uzle spracujeme najviac toľko, koľko umožňuje kapacita zariadenia.

V (5.11) používame pomocnú maticu  $E_{i,j}$ , ktorá zaručuje to, že cena spracovania na hrane bude rovnaká ako cena spracovania v konečnom uzle, a to pre všetky hrany, ktoré do tohto uzla vedú. Dôsledkom toho je cena spracovania rovnaká pre všetky ORP, ktoré v danom zariadení

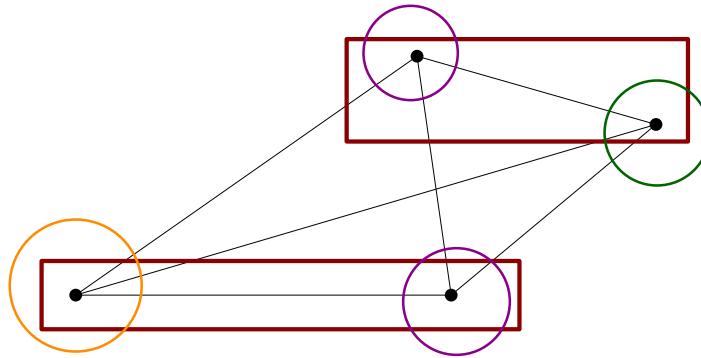
spracúvajú odpad. Bilancia uzla (5.12) zaručuje, že všetok odpad, ktorý uzol vyprodukuje alebo sa doňho (z neho) privezie, sa musí v danom uzle spracovať.

V rovnici (5.13) su vyjadrené celkové výsledné náklady v korunách ako súčet nákladov na prepravu po hrane  $j$  a nákladov za spracovanie na hrane  $j$  z rovnice (5.11), vektor  $F_i$  zaručí, že výsledné náklady každého uzla  $i$  započítame len raz, a to ako pre pôvodcu odpadu. Keďže poznáme len náklady na tonu, vynásobili sme ich produkciou v uzli a získali sme celkové náklady.

Rovnica (5.14) a (5.15) je aplikovaný vážený priemer (4.2), kde produkcia v uzli slúži ako váha.

V rovniciach 5.16 a 5.17 sme rozptýl výsledných nákladov pre kraj, a pre interval počtu obyvateľov, vyjadrili pomocou (4.5) a ako váhu sme použili produkciu v uzli.

Vytvoríme teda príklad so štyrmi uzlami, s troma rôznymi skupinami uzlov podľa počtu obyvateľov a s dvoma myslennými krajmi, ako môžeme vidieť na obrázku nižšie. Krúžky rovnakej farby zobrazujú ORP s rovnakým počtom obyvateľov a uzly, ktoré sú spolu v obdĺžniku, zobrazujú ORP v jednom kraji.



Obr. 5.3: Druhý model: s rozdelením na kraje a počty obyvateľov

Použijeme ten istý príklad ako v 5.1.2, takže vzdialenosti aj minimálne a maximálne náklady zostanú rovnaké. Ako počiatočný odhad sme použili výsledné hodnoty  $\mathbf{n}_i$  z predchádzajúceho príkladu, ktoré sme zaokrúhlili a posunuli o  $+5\text{kč/t}$ . Za priemery a smerodajné odchýlky sme položili hodnoty vypočítané z pôvodných nákladov. Interval, v ktorom sa nachádza cena za spracovanie, sme určili ako konštantnú hodnotu ceny spracovania v prvom modeli  $\pm 50$ . Doplnené údaje sú uvedené v tabuľkách 5.2-5.4

ORP č.	$K_i$ [t]	$n_i$ [Kč/t]	$n_i^{\min}$ [Kč/t]	$n_i^{\max}$ [Kč/t]	$r_i^{\min}$ [Kč/t]	$r_i^{\max}$ [Kč/t]
1	2850	905	500	1500	800	1000
2	1100	1085	500	1500	800	1000
3	634	985	500	1500	800	1000
4	1236	905	500	1500	800	1000

Tabuľka 5.2: Vstupné parametre

Tieto hodnoty sú následne spracované programom GAMS. Získame výsledný tok hranou  $j$ , ktorý zase zobrazíme orientovaným ohodnoteným grafom obr.(5.4), v ktorom hodnota úsečky

o	$\overline{n_o}$ [Kč/t]	$s_o$ [Kč/t]
1	900	0
2	1079	0
3	980	0

Tabuľka 5.3: Vstupné hodnoty pre skupiny obyvateľov

k	$\overline{n_k}$ [Kč/t]	$s_k$ [Kč/t]
1	1071	1453
2	966	943

Tabuľka 5.4: Vstupné hodnoty pre kraje

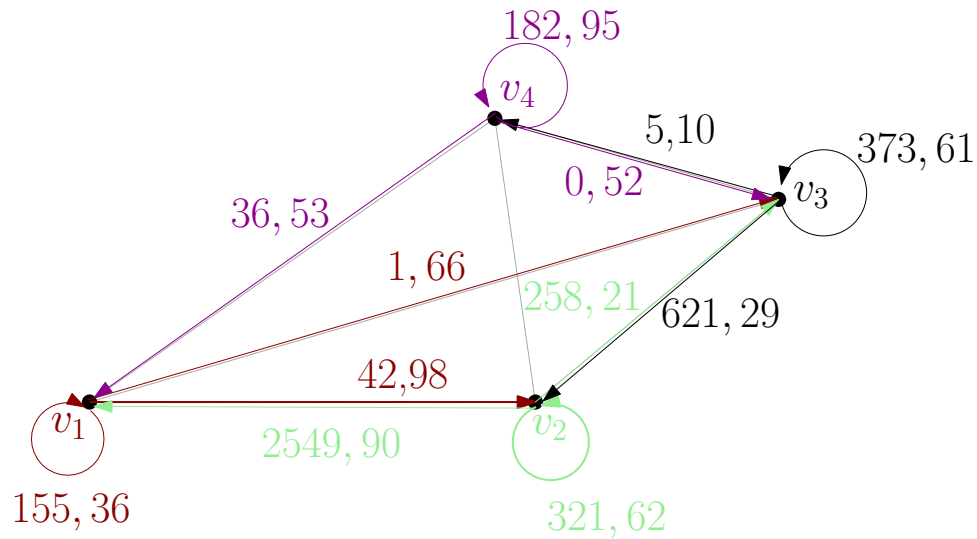
označuje množstvo odpadu prepraveného hranou  $j$  v tonách. Pomocná premenná  $\alpha_1$  bola použitá na relaxáciu úlohy, na vyváženie faktu, že je v úlohe malý počet uzlov a veľa premenných. Jej hodnoty su však malé  $\alpha_1(o) = (-2,7 \cdot 10^{-4}, -6,59 \cdot 10^{-5}, -8,67 \cdot 10^{-7})$ , ide prevdepodobne o chyby spôsobené zaokrúhlením pri tvorbe úlohy, a pri zaokrúhlení na dve desatiné miesta je nulová. Ďalšie relaxačné premenné, ktoré sú popísané v modeli, sme nepoužili. Výsledné náklady jednotlivých ORP sú zobrazené v tabuľke (5.4) a výsledná súčet kvadrátu odchýliek je  $z = 99,92$  [kč/t].

ORP č.	$n_i^v$ [Kč/t]	$\varepsilon_i$ [Kč/t]	$r_i$ [Kč/t]	$w_i$ [t]
1	900,36	-4,64	850	2741,80
2	1079,39	-5,61	850	985,89
3	980,11	-4,90	850	634,00
4	900,22	-4,78	850	1058,32

Tabuľka 5.5: Výsledné premenné v druhom modeli

Program teda chybu približne 5 kč/t detekoval. Z grafu (5.4) je si možné všimnúť, že nastavenie optimálnej ceny na minimum tohto intervalu zapríčinilo to, že pre optimálnu výchylku  $\varepsilon_i$  bolo potrebné odpad prevážať, aby sa zvýšili náklady. To môže mať niekoľko príčin:

- Predpoklad konštantnej ceny za prepravu nezodpovedá skutočnosti. Na ošetrenie tohto problému by bolo potrebné zmeniť cenu prepravy z konštantnej na nejakú lineárnu funkciu, alebo riešiť obmenu zvozovej úlohy. To však nie je úlohou tejto bakalárskej práce, ale je to jedna z možností budúceho rozšírenia.
- Odhad počiatočných nákladov, ktoré boli získané na základe predpokladu spolupráce obcí. Preto pri aplikácii modelu na skutočné dáta zvolíme iný.



Obr. 5.4: Výsledný tok prvej úlohy pri použití druhého modelu

- Rovnaký interval pre cenu spracovania nákladov vo všetkých uzloch spôsobil, že keď bola cena za spracovanie všade určená rovnaká (najnižšia), bolo potrebné na zvýšenie nákladov prepravovať odpad aj po dlhých hranách, ako je hrana medzi uzlom  $v_1$  a  $v_3$ , ktorá v predchádzajúcom modeli nie je použitá. Aby sa tento jav nezopakoval aj pri skutočných dátach, vynásobili sme hodnoty  $s_i^{min}$  a  $s_i^{max}$  koeficientom  $\Theta$ . Tento koeficient je popísaný v nasledujúcej kapitole.

## 6 Aplikácia na ORP

Najväčšie množstvo informácií o skutočných nákladoch obcí na zvoz a spracovania komunálneho aj triedeného odpadu poskytuje IMURO a VISOH. Tieto informácie sú obsiahnuté v projekte: Hodnotenie nákladov na hospodárenie s komunálnym odpadom v obciach ČR – aktualizácia 2015 ([8]), ktorý bol vytvorený IMURO a VISOH s cieľom poskytnúť obciam pravidelné porovnanie nákladov a výkonu v hlavných procesoch OH v rámci celej ČR a informácie k očakávanému vývoju nákladov komunálnych odpadových služieb, za účelom optimalizácie hospodárenia s odpadmi na úrovni obcí.

Z uvedeného projektu sme získali interval v ktorom sa nachádzajú náklady jednotlivých ORP, priemer a smerodajná odchýlka pre kraje a počty obyvateľov. Hodnoty sme aplikovali na úrovni ORP do modelu 5.2. Za počiatočný odhad nákladov sme zvolili strednú hodnotu intervalu, v ktorom sa náklady ORP nachádzajú. Interval pre náklady na spracovanie bol na základe konzultácie s ÚPI určený ako  $(1300 \pm 600)\Theta$ , kde sme koeficient  $\Theta$  určili ako:

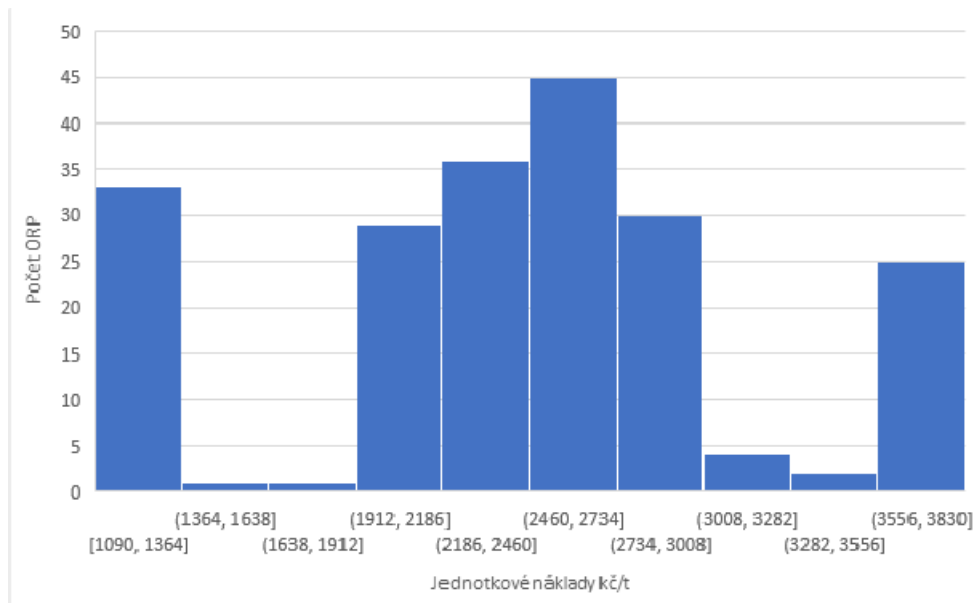
$$\Theta = \frac{\overline{n_k} b_{i,k}}{\min\{\overline{n_k}\}}$$

Predpokladáme teda, že krajoch z vyšším priemerom celkových nákladov, je aj vyššia cena za spracovanie, vyhneme sa tým problému, ktorý vznikol v motivačnom príklade 5.2. Tento interval je celkom veľký, a preto výsledny nebudú presné, model je však pripravený na dolňanie ďalších známych informácií. Ostatné použité parametre boli poskytnuté z dát z ÚPI.

Model bol aplikovaný na komunálny zmiešaný odpad (SKO), pretože je najviac ovplyvnený novelou zákona [12] a zároveň má najviac možností budúceho využitia. V niektorých krajinách Európy sa z vyprodukovaného SKO zrecykluje viac ako 50% a ČR by sa mala k tomuto číslu do roku 2024 nielen priblížiť, ale odhady do roku 2024 ukazujú, že sa zrecykluje 90% papiera a skla a 50% plastového odpadu a väčšina zvyšného odpadu bude energeticky spracovaná. To bude nielen energeticky a ekologicky, ale najmä ekonomicky výhodné. Na to, aby bol možný odhad tohto ekonomického vylepšenia, je potrebné poznať momentálne náklady, ktoré obce majú, pokiaľ sa tento odpad nevyužije.

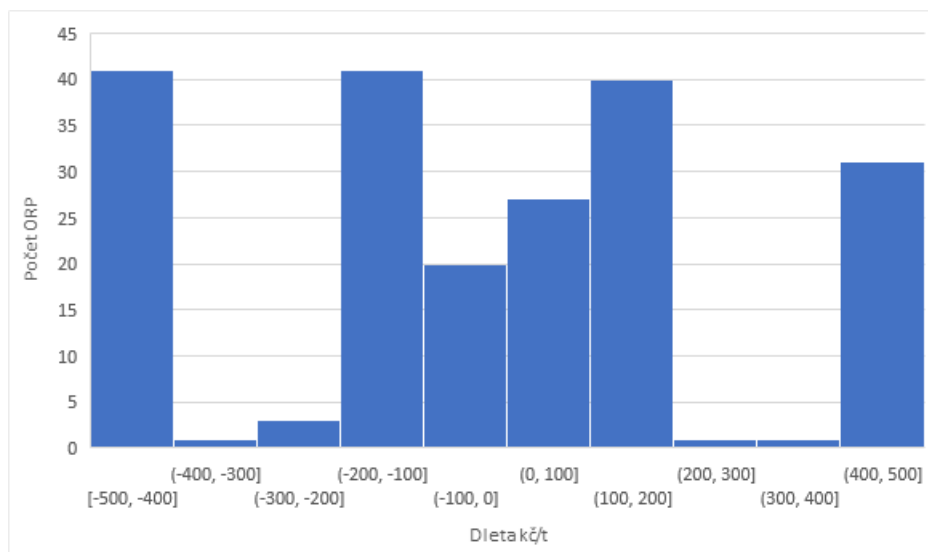
Počet obyvateľov v jednotlivých ORP sme aproximovali pomocou dát z ČSU a priradili ich do skupín počtu obyvateľov podľa intervalov v [8]. Ale vzhľadom na to, že v [8] sú tieto intervaly vytvorené pre počet obyvateľov obce a nie ORP, potrebovali sme použiť  $\alpha_1$ . Ostatné dve pomocné premenné, ktoré sú využité na výpočet rozptylu boli použité tiež. Výsledky modelu sú zobrazené na obr. 6.1 až 6.3.

Z grafu 6.1, vidíme, že výsledné náklady (za spracovanie a prevoz) na tonu sa pohybujú v intervale stanovenom IMURO-m, ale nie sú z normálneho rozdelenia, najmä kvôli veľkému množstvu hraničných hodnôt. Práve ORP, ktorých náklady sa nachádzajú v intervale  $(3556 - 3830 >$ , majú ekonomickú motiváciu zmeniť spôsob spracovania SKO a prejsť k iným možnostiam nakladania s odpadom, ako sú recyklácia a energetické využitie.

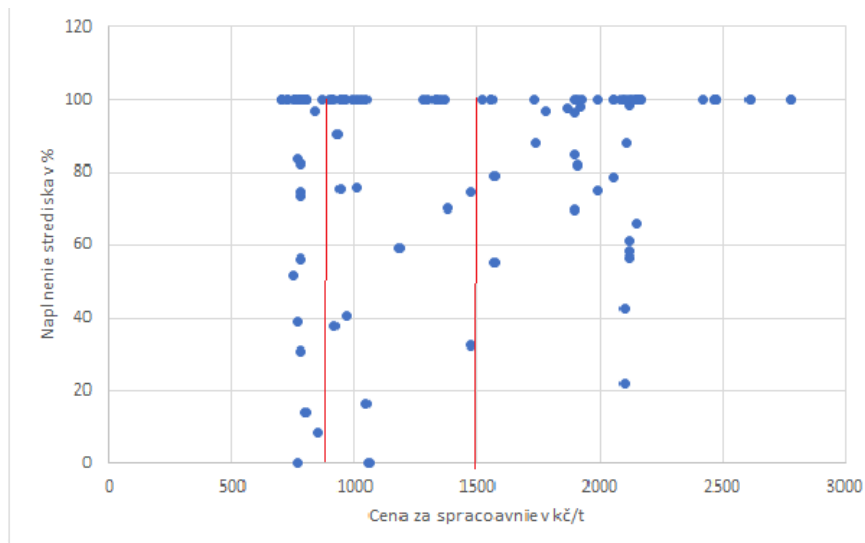


Obr. 6.1: Histogram výsledných nákladov jednotlivých ORP

Na grafe 6.2 môžeme pozorujeme, že len málo hodnôt sa nezmenilo vôbec. Väčšina hodnôt sa zmenila v rozpätí 100 až 200—. Vzhľadom na to, že v modeli bola aktívna podmienka (5.15) znamená to, že sa hodnoty výsledných nákladov riadili najmä touto podmienkou. Je to dôvodom prečo bola aktívna  $\alpha_3$ , ktorá je v tomto prípade záporná a porovnateľne veľká ako samotné rozptyly. Výsledná smerodajná odchýlka pre rozdelenie krajov teda vyšla omnoho menšia ako v [8], je to spôsobené tým, že výsledné náklady sa hýbali prioritne k priemerným hodnotám  $\bar{n}_k$ . Takto sa výsledné rozptyly pre kraje pohybujú rádovo v stovkách namiesto tisícoch. Dalším dôvodom je aj to, že interval, v ktorom sa pohybujú hodnoty jednotkových nákladov, je menší ako interval, v ktorom sa pohybujú hodnoty pre všetky obce.



Obr. 6.2: Histogram epsilonových hodnôt



Obr. 6.3: Závislosť naplnenia strediska od ceny spracovania

Pri smerodajných odchýlkach obcí, sa  $\alpha_2$  pohybovala v stovkách, čiže bola porovnateľná s veľkosťou samotných smerodajných odchýliek, ale to bolo očakávateľné, vzhľadom na aproximáciu jednotlivých ORP na obce.

V grafe závislosti ceny spracovania červené čiary vyznačujú interval, vo vnútri ktorého sa pohybujú ceny spracovania v ČR. Väčšina cien spracovania sa však nachádza mimo tento interval, sú až dvojnásobne väčšie ako je priemer. Je to spôsobené tým, že cena spracovania a cena za prevoz medzi jednotlivými ORP nezahŕňa všetky náklady, ktoré v skutočnosti obce majú, ako sú najmä náklady na zvoz v obciach a následne v rámci ORP. Pri aplikácii na úrovni obcí už budú zahrnuté aj tieto náklady, a tento problém bude upravený.

## 7 Možnosti ďalšieho vývoja

V náväznosti na aplikáciu na reálnych dátach sa ponúkajú ďalšie možnosti vývoja modelu, ktoré presahujú rozsah tejto práce.

### 7.1 Aplikácia na obce

Model 5.2 by v budúcnosti bolo vhodnejšie aplikovať na obce. V takom prípade sa zvýšil počet prvkov množiny  $\mathcal{I}$ .

Počet obyvateľov by už nebol aproximáciou a všetky pomocné premenné už nebudú potrebné, pretože informácie o počte obyvateľov budú presné.

Okrem zmeny v množine  $\mathcal{I}$  nastane zmena aj v modeli samotnom. Zatiaľ čo produkciu odpadu jednotlivých ORP vieme zistiť presne, pri aplikácii na samotné obce by sme vedeli určiť interval, v ktorom sa hodnota nachádza a priemer v skupine počtu obyvateľov, tak ako je to momentálne pri nákladoch. Ďalšou zmenou by bol vznik novej množiny  $\mathcal{L}$ , v ktorej by boli zaradené jednotlivé ORP, a s ňou aj vznik matice  $D_{l,i}$ . Tak isto budeme potrebovať informáciu o počte obyvateľov v obciach.

#### 7.1.1 Označenie v modeli s rozšírením na obce

Do modelu by sme pridali tieto množiny, parametre a premenné:

##### Množiny

- $\mathcal{I}$  množina uzlov - obcí
- $\mathcal{L}$  množina ORP

##### Parametre

- $D_{l,i}$  matica príslušnosti do ORP
- $B_{k,i}$  matica príslušnosti do kraja
- $C_{o,i}$  matica príslušnosti do intervalu počtu obyvateľov
- $p_i^{max}$  maximálne množstvo vyprodukovaného odpadu v obci v t/obyv
- $p_i^{min}$  maximálne množstvo vyprodukovaného odpadu v obci v t/obyv
- $\overline{p_o}$  priemerná produkcia obcí s rovnakým počtom obyvateľov t/obyv
- $\overline{p_k}$  priemerná produkcia obcí v kraji t/obyv

##### Premenné

- $p_i$  množstvo vyprodukovaného odpadu v obciach t/obyv



A obmedzujúce podmienky rozšírime o rovnice (7.1),(7.2) a o podmienky zaistujúce  $\overline{p_o}$  a  $\overline{p_k}$  ktoré sú obdobné ako (5.14), (5.15), (5.16) a (5.17), len náklady sú nahradené produkciou a ako váha je použitý údaj o počte obyvateľov.

$$p_l = \sum_{i \in \mathcal{I}} d_{l,i} p_i o_i \quad (7.1)$$

$$p_{min} \leq \mathbf{p_i} \leq p_{max} \quad (7.2)$$

## 7.2 Aplikácia na frakcie triedeného odpadu ako napr bioodpad, separovaný plast papier a sklo

Na recyklovateľné odpady bude vhodnejšie aplikovať model na úrovni obcí. Zmenia sa len hodnoty parametrov z [8], a vzhľadom na to, že nemáme informácie o množstve produkcie triedeného odpadu, na úrovni obcí, nepoužijeme rovnicu (7.1).

## 8 Záver

Cieľom tejto práce bolo vytvoriť model na zistenie reálnych finančných nákladov úrovni ORP, analýzu výsledkov a nedostatkov tohto modelu. Tieto informácie môžu byť použité k ďalšiemu vývoju a analýze tohto modelu, ktorý pri aplikovaní na úrovni obcí, ako na komunálny odpad, tak na separovateľné odpady, poskytne informácie o toku a nákladoch jednotlivých obcí na zvoz a spracovanie odpadu, ktoré sú inak nedostupné.

V práci je najprv zhrnutý matematický aparát, ktorý je v ďalších kapitolách využitý na zostavenie matematického modelu, ktorý bol zostavený na rekonštrukciu finančných nákladov, ktoré majú ORP za prevoz a spracovanie odpadu, a ďalších údajov v oblasti OH. Tomuto je venovaná kapitola 5.1, pričom pozornosť bola venovaná vysvetleniu základných rozdielov vytvorených modelov a analýzu nevýhod 5.1.2.

V kapitole 6 je model 5.2 aplikovaný na skutočné dáta na úrovni ORP, ktoré boli aproximované na obce. Výsledky tohoto modelu sú zhrnuté v grafoch, ktoré sú v texte slovné okomentované.

Nedostatky aplikácie na úrovni obcí sú následne zanalyzované a v kapitole 7.1 je modifikovaný model, ktorý rieši tieto nedostatky na úrovni obcí a tiež poskytuje možnosť aplikácie na triedený odpad.

Tento model môže v budúcnosti slúžiť ako podporný výpočtový systém, môže odhadnúť vhodné oblasti a mieru podpory s ohľadom na súčasný stav nakladania s využiteľným odpadom.

# Literatúra

- [1] ANDĚL, Jiří. Statistické metody. Vyd.4. Praha : Matfyzpress ,2007.ISBN 978-80-7378-003-6 .
- [2] DEMEL, Jiří. Teorie grafů. Vyd. 2. přeprac. Praha: České vysoké učení technické, 1991.
- [3] DOSTÁL, Zdeněk a Petr BEREMLIJSKI. Metody optimalizace [online]. 2012 [cit. 2016-03-26]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metody\\_optimalizace.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metody_optimalizace.pdf)
- [4] DŽURINA, Jozef a Michal TKÁČ. Lineárne programovanie. Fakulta elektrotechniky a informatiky Technická univerzita v Košiciach, 2012 . ISBN: 978-80-553-0910-1.
- [5] FOLTÝNEK, Tomáš a Jana DANNHOFFEROVÁ. Teorie grafů. Brno: Mendelova univerzita v Brně, 2011. ISBN 978-80-7375-500-3.
- [6] GAJDA, Bohumil. Speciální metody optimalizace. 2009. Diplomová práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.
- [7] HLINĚNÝ, Petr. Základy teorie grafů. [online]. [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/fi/js10/grafy/Grafy-text10.pdf>
- [8] Hodnocení nákladů na hospodaření s odpady v obcích 2015 (data za rok 2014), 2015. [online]. [cit. 21-03-2017] Dostupné z: <http://www.institut-urmo.cz/cz/projekty/18-odpadove-hospodarstvi/137-hodnoceni-nakladu-na-hospodareni-s-komunalnimi-odpady-v-obcich-2015>
- [9] KARPÍŠEK, Zdeněk. Matematika IV : statistika a pravděpodobnost. Vysoké učení technické v Brně, 2007. ISBN 978-80-214-3380-9
- [10] KLAPKA Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. Metody operačního výzkumu. Brno: Vysoké učení technické, 1996. ISBN 80-214-0817-0.
- [11] NEŠETŘIL, Jaroslav a Jiří MATOUŠEK. Kapitoly z diskrétní matematiky. Praha: MATFYZPRESS, 1996. ISBN 80-85863-17-0.
- [12] Novela zákona o odpadech č. 229/2014 Sb. Zákon, kterým se mění zákon č.185/2001 Sb., o odpadech a o změně některých dalších zákonů, ve znění pozdějších předpisů
- [13] SOUČEK, Eduard. Statistika pro ekonomy. Vysoká škola ekonomie a managementu , 2007. ISBN: 978-80-86730-06-6.

- [14] Statistika: Produkce, využití a odstranění odpadu a produkce druhotných surovin v roce 2014. [online]. [cit 10-05-2017] Dostupné z: <http://www.tretiruka.cz/news/statistika-csu-produkce-vyuziti-a-odstraneni-odpadu-a-produkce-druhotnych-surovin-v-roce-2014/>

# Zoznam použitých skratiek

ČSU	Český statistický úrad
GAMS	General Algebraic Modeling System
IMURO	Institut pro udržitelný rozvoj měst a obcí
OH	Odpadové hospodárstvo
ORP	Obec s rozšírenou pôsobnosťou
ÚPI	
VISOH	Verejný informačnýho systém odpadového hospodárstva

## 9 Zoznam príloh

CD s excelom s údajmi a programom v prostredí GAMS